

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ВЫДЕЛЕНИЯ ТРЁХ НЕЗАВИСИМЫХ СООБЩЕНИЙ ДВУХКАНАЛЬНЫМ ПРИЁМНИКОМ ПРИ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

¹Астрецов Д.В., ¹Андреев Е.И.

1 ФГАОУВО Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия (620002 Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира 19) e-mail: dv_astr@mail.ru

Аннотация: Данная статья посвящена предельной возможности выделения модуляционных сигналов от технических средств, возникающих при их зондировании высокочастотными колебаниями. Получены аналитические выражения для дисперсий ошибок выделения трёх сообщений из смеси сигнала с амплитудно-фазовой модуляцией и широкополосного аддитивного шума. Построены зависимости дисперсий ошибок выделения сообщений от отношения мощностей сигнала и шума в приёмных трактах.

Ключевые слова: потенциальная помехоустойчивость, амплитудно-фазовая модуляция, дисперсии ошибок выделения сообщений.

POTENTIAL NOISE IMMUNITY OF THREE INDEPENDENT MESSAGES WITH AMPLITUDE AND PHASE MODULATION DISTINGUISHING BY DUAL CHANNEL RECEIVER

¹Astecov D.V., ¹Andreev E.I.

1Federal Autonomous Educational Institution of Higher Education Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia (620002 Russia, Yekaterinburg, street Mira,19) e-mail: dv_astr@mail.ru

Abstract: This article is dedicated to limit possibility of modulation signal distinguishing by technical means occurring when sounded by high-frequency oscillation. Analytical expressions for dispersion of errors distinguishing of three messages from a mix of signal with amplitude and phase modulation and broadband additive noise are obtained. Construct dependence of errors dispersion of message distinguishing from the ratio of signal and noise power in receiver tract.

Key words: potential noise immunity, amplitude and phase modulation, dispersion of error distinguishing of messages.

Целью данной работы - определить предельные возможности выделения модуляционных сигналов от технических средств, возникающие при их зондировании высокочастотными колебаниями, получить обобщенные аналитические соотношения, определяющие предельные возможности выделения модуляционных сигналов в присутствии как естественных, так и непреднамеренных помех искусственного происхождения.

В теории оптимальных методов приема [2] подобная задача относится к задачам определения потенциальной помехоустойчивости [1]. Впервые задача нахождения предельной максимально возможной помехоустойчивости выделения несущего некоторую информацию процесса, называемого сообщением, поставлена В.А.Котельниковым в своей докторской диссертации, защищенной им в Московском энергетическом институте в начале 1947 года и опубликованной в 1956 году [1] после появления в зарубежных изданиях решений близких по характеру задач. Не смотря на возникновение к началу шестидесятых годов прошлого века теории оптимальных методов приема, в состав которой теория В.А.Котельникова входит как некая теория решения частной задачи, введенное В.А.Котельниковым понятие потенциальной помехоустойчивости имеет самостоятельное значение, а методы нахождения выражений для предельно достижимой помехоустойчивости остаются актуальными и оригинальными и в настоящее время.

Бурное развитие теории оптимальных методов приема, происходившее в конце пятидесятых – начале шестидесятых годов прошлого века привело ряду ее разветвлений, отличающихся использованием различных систем основных допущений и задач, решаемых соответствующим ответвлением. В основном они касаются приема меняющихся сообщений («прием колебаний» - по терминологии [1] и [2]). Во всех указанных случаях критериями качества приема являются среднеквадратичные ошибки воспроизведения сообщения (или дисперсии ошибок).

Как указывалось, первым поставил и решил задачу о нахождении потенциальной помехоустойчивости В.А. Котельников. При его подходе требуется выполнение следующих условий (допущений):

1. Единственным источником ошибок выделения сообщения являются помехи. При отсутствии помех сообщение выделяется точно.
2. Параметры сигнала известны точно за исключением сообщения.
3. Характеристики помехи известны, закон распределения ее – нормальный.
4. Отношение мощности сигнала и помехи в полосе частот сообщения намного превышает единицу, ошибка имеет нормальное распределение.
5. Сообщение $\lambda(t)$ полагается нормированным $|\lambda(t)| \leq 1$, закон распределения сообщения – равномерный на интервале $[-1,1]$:

$$w(\lambda) = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

6. Насколько нам известно, сигнал зависит только от одного сообщения, надлежащего выделению. Все остальные параметры, как указывалось, известны и не несут информации.

Метод нахождения минимальной дисперсии ошибки в случае выделения колебаний не прост. Поэтому для случая приема сигналов с прямой модуляцией, к которым относится и сигнал с амплитудно-фазовой модуляцией, проще использовать метод, основанный на приложении аппарата математической статистики к задачам оптимального радиоприема, предложенный Миддлтоном [3]. Для непосредственного получения выражений для дисперсии ошибки рассмотрим указанный метод, основанный на теории статистических решений, частным случаем которой является теория оценок [5]. Согласно этой теории минимальная дисперсия точечной оценки может быть найдена из неравенства Крамера-Рао:

$$\sigma_{\Delta\lambda}^2 \geq \frac{1}{\left\langle \left[\frac{\partial \ln P(y/\lambda)}{\partial \lambda} \right]^2 \right\rangle}, \quad (2)$$

где $P(y/\lambda)$ – функция правдоподобия оцениваемого параметра λ при наблюдении его в сумме $y(t) = S(t, \lambda) + n(t)$ сигнала, модулированного сообщением λ в присутствии аддитивной помехи $n(t)$, угловые скобки означают математическое ожидание.

При использовании методов математической статистики в классическом варианте приходится считаться с постоянством сообщения [4] на интервале наблюдения T . Однако эту трудность можно обойти, полагая интервал T периодом дискретизации $T = \frac{1}{2F_B}$, где F_B – верхняя частота спектра реального сообщения.

Указанный метод прост и удобен для применения, если помеха является белым шумом, так как функция правдоподобия, фигурирующая в (2), может быть найдена из функционала плотности вероятности белого шума $n(t)$:

$$P(n) = K \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T n^2(t) dt \right\}, \quad (3)$$

где N_0 – спектральная плотность мощности белого шума,

T – интервал наблюдения.

Подставляя разность $n(t) = y(t) - S(t, \lambda)$, можно получить функцию правдоподобия

$$P(n) = K \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - S(t, \lambda)]^2 dt \right\}. \quad (4)$$

Равенство (4) может быть использовано как для синтеза оптимального алгоритма методом максимума правдоподобия, так и для нахождения минимальной дисперсии ошибки выделения интересующего параметра, т.е. для нахождения потенциальной помехоустойчивости [2].

Представление сигналов с амплитудно-фазовой модуляцией тремя сообщениями

Рассмотрим математическую модель сигнала с амплитудно-фазовой модуляцией тремя независимыми сообщениями в предположении, что индексы модуляции по амплитуде M_i и по фазе m_i ($i = 1, 2, 3$) малы ($M_i, m_i \ll 1$). Полагая, что остальные параметры сигнала известны, можно записать:

$$S(t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = U_0 [1 + M_1 \lambda_1(t) + M_2 \lambda_2(t) + M_3 \lambda_3(t)] \cos[\omega_0 t + m_1 \lambda_1(t) + m_2 \lambda_2(t) + m_3 \lambda_3(t) + \varphi_0] \quad (5)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – нормированные ($|\lambda_i| \leq 1$) независимые сообщения,

M_1, M_2, M_3 – индексы амплитудной модуляции,

m_1, m_2, m_3 – индексы фазовой модуляции,

U_0, ω_0 – средние амплитуда и частота сигнала,

φ_0 – начальная фаза сигнала.

Полагаем, что параметры сигнала, в том числе сообщения $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ можно считать постоянными на интервале наблюдения $(0, T]$. Для сообщений это означает, что они могут быть представлены процессами с конечной верхней частотой спектра $F_c = \frac{1}{2T}$.

Представляя косинус суммы аргументов в равенстве (5) известной тригонометрической формулой, учитывая, что при малых углах $\cos(x) \approx 1$, а $\sin(x) \approx x$, можно получить:

$$\begin{aligned} S(t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= U_0 [1 + M_1 \lambda_1(t) + M_2 \lambda_2(t) + M_3 \lambda_3(t)] \cos[\omega_0 t + m_1 \lambda_1(t) + m_2 \lambda_2(t) + \\ &+ m_3 \lambda_3(t) + \varphi_0] = U_0 [1 + M_1 \lambda_1(t) + M_2 \lambda_2(t) + M_3 \lambda_3(t)] \cos[\omega_0 t + \varphi_0] \cos[m_1 \lambda_1(t) + \\ &+ m_2 \lambda_2(t) + m_3 \lambda_3(t)] - U_0 [1 + M_1 \lambda_1(t) + M_2 \lambda_2(t) + M_3 \lambda_3(t)] \sin[\omega_0 t + \varphi_0] \sin[m_1 \lambda_1(t) + \\ &+ m_2 \lambda_2(t) + m_3 \lambda_3(t)] \approx U_0 [1 + M_1 \lambda_1(t) + M_2 \lambda_2(t) + M_3 \lambda_3(t)] \cos[\omega_0 t + \varphi_0] - \\ &U_0 [m_1 \lambda_1(t) + m_2 \lambda_2(t) + m_3 \lambda_3(t)] \sin[\omega_0 t + \varphi_0]. \end{aligned} \quad (6)$$

Вводя понятия «полный индекс модуляции» $\mu_i = \sqrt{m_i^2 + M_i^2}$ и «угол модуляции» $\Phi_i = \arctg \frac{m_i}{M_i}$, с учетом соотношений $M_i = \mu_i \cos(\Phi_i)$ и $m_i = \mu_i \sin(\Phi_i)$, где $(i = 1, 2, 3)$, можно найти:

$$S(t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \approx U_0 \cos[\omega_0 t + \varphi_0] + U_0 \mu_1 \lambda_1(t) \cos[\omega_0 t + \Phi_1 + \varphi_0] + U_0 \mu_2 \lambda_2(t) \cos[\omega_0 t + \Phi_2 + \varphi_0] + U_0 \mu_3 \lambda_3(t) \cos[\omega_0 t + \Phi_3 + \varphi_0] \quad (7)$$

При наличии флуктуаций амплитуды $\alpha(t)$ и фазы $\varphi(t)$ сигнал с амплитудно-фазовой малоиндексной модуляцией может быть записан в виде:

$$S(t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = U_0 [1 + \alpha(t)] \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t)] + U_0 \mu_1 \lambda_1(t) \cos[\omega_0 t + \Phi_1 + \varphi_0] + U_0 \mu_2 \lambda_2(t) \cos[\omega_0 t + \Phi_2 + \varphi_0] + U_0 \mu_3 \lambda_3(t) \cos[\omega_0 t + \Phi_3 + \varphi_0] \quad (8)$$

где считается, что флуктуации $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$ являются слабыми: $\alpha(t) \ll 1$, $\varphi(t) \ll 1$ практически в любые моменты времени.

Потенциальная помехоустойчивость выделения при приеме сигналов с амплитудно-фазовой модуляцией

Рассмотрим двухканальный прием сигналов, полученных в (7), в присутствии независимых шумов в каждом из приемных каналов:

$$y_1(t) = U_1 \cos[\omega_0 t] + U_1 \mu_{11} \lambda_1(t) \cos[\omega_0 t + \Phi_{11}] + U_1 \mu_{12} \lambda_2(t) \cos[\omega_0 t + \Phi_{12}] + U_1 \mu_{13} \lambda_3(t) \cos[\omega_0 t + \Phi_{13}] + n_1(t) \quad (9)$$

$$y_1(t) = U_2 \cos[\omega_0 t] + U_2 \mu_{21} \lambda_1(t) \cos[\omega_0 t + \varphi + \Phi_{21}] + U_2 \mu_{22} \lambda_2(t) \cos[\omega_0 t + \varphi + \Phi_{22}] + U_2 \mu_{23} \lambda_3(t) \cos[\omega_0 t + \varphi + \Phi_{23}] + n_2(t) \quad (10)$$

где U_1, U_2 – средние амплитуды сигналов; μ_{1i}, μ_{2i} – полный индекс модуляции первого и второго сигналов i -ым сообщением; Φ_{1i}, Φ_{2i} – углы модуляции первого и второго сигналов i -ым сообщением; $n_1(t), n_2(t)$ – белые гауссовские аддитивные помехи со спектральными плотностями мощности $N_1/2$ и $N_2/2$.

Сообщения $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ и $\lambda_3(t)$ полагаются независимыми нормальными случайными процессами с дисперсиями $\sigma_\lambda^2 \approx 0,11$, что означает выполнение условия нормировки с вероятностью $P_n \approx 0,997$ [4]. Как указывалось выше, каждое из сообщений на интервале наблюдения можно считать постоянной величиной, и применять для нахождения минимальной дисперсии ошибки статистическую теорию точечных оценок неизвестных величин. В соответствии с этой теорией матрица минимальных дисперсий оценок параметров $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ и $\lambda_3(t)$ может быть найдена обращением информационной матрицы Фишера:

$$I = - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \ln P(\vec{y}/\vec{\lambda})}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 \ln P(\vec{y}/\vec{\lambda})}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 \ln P(\vec{y}/\vec{\lambda})}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_3} \\ \frac{\partial^2 \ln P(\vec{y}/\vec{\lambda})}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 \ln P(\vec{y}/\vec{\lambda})}{\partial \lambda_2^2} & \frac{\partial^2 \ln P(\vec{y}/\vec{\lambda})}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_3} \\ \frac{\partial^2 \ln P(\vec{y}/\vec{\lambda})}{\partial \lambda_3 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 \ln P(\vec{y}/\vec{\lambda})}{\partial \lambda_3 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 \ln P(\vec{y}/\vec{\lambda})}{\partial \lambda_3^2} \end{vmatrix} \quad (11)$$

где выражение для $P(\vec{y}/\vec{\lambda})$ приведено в формуле (4).

Элементы матрицы (11) в общем виде имеют вид:

$$\begin{aligned}
I_{ij} &= \frac{1}{N_1} \int_0^T \frac{\partial^2 [S_1(t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} dt + \frac{1}{N_2} \int_0^T \frac{\partial^2 [S_2(t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} dt = \\
&= \frac{2}{N_1} \int_0^T \frac{\partial [S_1(t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]}{\partial \lambda_i} \frac{\partial [S_1(t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]}{\partial \lambda_j} dt + \\
&+ \frac{2}{N_1} \int_0^T \frac{\partial [S_2(t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]}{\partial \lambda_i} \frac{\partial [S_2(t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]}{\partial \lambda_j} dt = \\
&= \frac{2U_1^2 \mu_{1i} \mu_{1j}}{N_1} \int_0^T \cos[\omega_0 t + \Phi_{1i}] \cos[\omega_0 t + \Phi_{1j}] dt + \\
&+ \frac{2U_2^2 \mu_{2i} \mu_{2j}}{N_2} \int_0^T \cos[\omega_0 t + \varphi + \Phi_{2i}] \cos[\omega_0 t + \varphi + \Phi_{2j}] dt = \\
&= \frac{T}{N_1} U_1^2 \mu_{1i} \mu_{1j} \cos(\Phi_{1i} - \Phi_{1j}) + \\
&+ \frac{T}{N_2} U_2^2 \mu_{2i} \mu_{2j} \cos(\Phi_{2i} - \Phi_{2j}) = \\
&= q_1^2 \mu_{1i} \mu_{1j} \cos(\Phi_{1i} - \Phi_{1j}) + q_2^2 \mu_{2i} \mu_{2j} \cos(\Phi_{2i} - \Phi_{2j}), \tag{12}
\end{aligned}$$

где q_i^2 – отношение мощностей сигнала и шума в i -ом канале.

Тогда из формулы (12) элементы информационной матрицы Фишера выражаются в виде:

$$I_{11} = q_1^2 \mu_{11}^2 + q_2^2 \mu_{21}^2, \tag{13}$$

$$I_{22} = q_1^2 \mu_{12}^2 + q_2^2 \mu_{22}^2, \tag{14}$$

$$I_{33} = q_1^2 \mu_{13}^2 + q_2^2 \mu_{23}^2, \tag{15}$$

$$I_{21} = I_{12} = q_1^2 \mu_{11} \mu_{12} \cos(\Phi_{11} - \Phi_{12}) + q_2^2 \mu_{21} \mu_{22} \cos(\Phi_{21} - \Phi_{22}), \tag{16}$$

$$I_{31} = I_{13} = q_1^2 \mu_{11} \mu_{13} \cos(\Phi_{11} - \Phi_{13}) + q_2^2 \mu_{21} \mu_{23} \cos(\Phi_{21} - \Phi_{23}), \tag{17}$$

$$I_{23} = I_{32} = q_1^2 \mu_{12} \mu_{13} \cos(\Phi_{12} - \Phi_{13}) + q_2^2 \mu_{22} \mu_{23} \cos(\Phi_{22} - \Phi_{23}). \tag{18}$$

Обращая информационную матрицу (11) с использованием выражений для ее элементов, можно получить матрицу собственных и взаимных дисперсий оценок сообщений $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и $\lambda_3(t)$. Собственные дисперсии оценок i -ого сообщений σ_i^2 равны:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= [\cos^2(\Phi_{12} - \Phi_{13}) \mu_{12}^2 \mu_{13}^3 q_1^4 + 2 \cos(\Phi_{12} - \Phi_{13}) \cos(\Phi_{22} - \Phi_{23}) \mu_{12} \mu_{13} \mu_{22} \mu_{23} q_1^2 q_2^2 + \\
&+ \cos^2(\Phi_{22} - \Phi_{23}) \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^4 - \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^4 - \mu_{12}^2 \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^2 - \mu_{13}^2 \mu_{22}^2 q_1^2 q_2^2 - \\
&\mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^4] /
\end{aligned}$$

[-

$$\begin{aligned}
& -\mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^{25} - \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^6 + \cos^2(\Phi_{11} - \Phi_{12}) \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^6 + \cos^2(\Phi_{21} - \\
& - \Phi_{22}) \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^6 - \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 \mu_{21}^2 q_1^4 q_2^{21} - \mu_{12}^2 \mu_{21}^2 \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^{23} - \\
& - \mu_{13}^2 \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 q_1^2 q_2^{23} - \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{23}^2 q_1^4 q_2^2 - \mu_{11}^2 \mu_{13}^2 \mu_{22}^2 q_1^4 q_2^2 - \mu_{11}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^4 + \\
& + \cos^2(\Phi_{22} - \Phi_{23}) \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^{25} + \cos^2(\Phi_{12} - \Phi_{13}) \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^6 + \cos^2(\Phi_{11} - \\
& - \Phi_{13}) \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^6 + \cos^2(\Phi_{21} - \Phi_{23}) \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^6 - 2\cos(\Phi_{11} - \Phi_{13})\cos(\Phi_{21} - \\
& - \Phi_{22})\cos(\Phi_{22} - \Phi_{23})\mu_{11}\mu_{13}\mu_{21}\mu_{22}^2\mu_{23}q_1^2q_2^4 - 2\cos(\Phi_{21} - \Phi_{23})\cos(\Phi_{11} - \Phi_{12})\cos(\Phi_{12} - \\
& - \Phi_{13})\mu_{11}\mu_{12}^2\mu_{13}\mu_{21}\mu_{23}q_1^4q_2^2 - \\
& - 2\cos(\Phi_{21} - \Phi_{23})\cos(\Phi_{11} - \Phi_{12})\cos(\Phi_{22} - \Phi_{23})\mu_{11}\mu_{12}\mu_{21}\mu_{22}\mu_{23}^2q_1^2q_2^4 - 2\cos(\Phi_{21} - \\
& - \Phi_{23})\cos(\Phi_{21} - \Phi_{22})\cos(\Phi_{12} - \Phi_{13})\mu_{12}\mu_{13}\mu_{21}^2\mu_{22}\mu_{23}q_1^2q_2^4 - 2\cos(\Phi_{11} - \Phi_{13})\cos(\Phi_{11} - \\
& - \Phi_{12})\cos(\Phi_{22} - \Phi_{23})\mu_{11}^2\mu_{12}\mu_{13}\mu_{22}\mu_{23}q_1^4q_2^2 - \\
& - 2\cos(\Phi_{11} - \Phi_{13})\cos(\Phi_{21} - \Phi_{22})\cos(\Phi_{12} - \Phi_{13})\mu_{11}\mu_{12}\mu_{13}^2\mu_{21}\mu_{22}q_1^4q_2^2 \\
& + \\
& \cos^2(\Phi_{11} - \Phi_{12})\mu_{11}^2\mu_{12}^2\mu_{23}^2q_1^4q_2^2 + \cos^2(\Phi_{21} - \Phi_{22})\mu_{13}^2\mu_{21}^2\mu_{22}^2q_1^2q_2^4 + \\
& + \cos^2(\Phi_{12} - \Phi_{13})\mu_{12}^2\mu_{13}^2\mu_{21}^2q_1^4q_2^{21} + \\
& + \cos^2(\Phi_{22} - \Phi_{23})\mu_{11}^2\mu_{22}^2\mu_{23}^2q_1^2q_2^4 + \cos^2(\Phi_{11} - \Phi_{13})\mu_{11}^2\mu_{13}^2\mu_{22}^2q_1^4q_2^2 + \\
& + \cos^2(\Phi_{21} - \Phi_{23})\mu_{12}^2\mu_{21}^2\mu_{23}^2q_1^2q_2^4 - \\
& - 2\cos(\Phi_{11} - \Phi_{13})\cos(\Phi_{11} - \Phi_{12})\cos(\Phi_{12} - \Phi_{13})\mu_{11}^2\mu_{12}^2\mu_{13}^2q_1^6 - \\
& - 2\cos(\Phi_{21} - \Phi_{23})\cos(\Phi_{21} - \Phi_{22})\cos(\Phi_{22} - \Phi_{23})\mu_{21}^2\mu_{22}^2\mu_{23}^2q_2^6 + \\
& + 2\cos(\Phi_{12} - \Phi_{13})\cos(\Phi_{22} - \Phi_{23})\mu_{12}\mu_{13}\mu_{21}^2\mu_{22}\mu_{23}q_1^2q_2^{23} + \\
& + 2\cos(\Phi_{12} - \Phi_{13})\cos(\Phi_{22} - \Phi_{23})\mu_{11}^2\mu_{12}\mu_{13}\mu_{22}\mu_{23}q_1^4q_2^2 + \\
& + 2\cos(\Phi_{11} - \Phi_{13})\cos(\Phi_{21} - \Phi_{23})\mu_{11}\mu_{12}^2\mu_{13}\mu_{21}\mu_{23}q_1^4q_2^2 + \\
& + 2\cos(\Phi_{11} - \Phi_{13})\cos(\Phi_{21} - \Phi_{23})\mu_{11}\mu_{13}\mu_{21}\mu_{22}^2\mu_{23}q_1^2q_2^4 + \\
& + 2\cos(\Phi_{11} - \Phi_{12})\cos(\Phi_{21} - \Phi_{22})\mu_{11}\mu_{12}\mu_{13}^2\mu_{21}\mu_{22}q_1^4q_2^2 + \\
& + 2\cos(\Phi_{11} - \Phi_{12})\cos(\Phi_{21} - \Phi_{22})\mu_{11}\mu_{12}\mu_{21}\mu_{22}\mu_{23}^2q_1^2q_2^4], \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 = & -\mu_{13}^2 \mu_{21}^2 q_1^2 q_2^{21} - \mu_{21}^2 \mu_{23}^2 q_2^{23} + \cos^2(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \mu_{11}^2 \mu_{13}^2 q_1^4 + \\ & + 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \mu_{11} \mu_{13} \mu_{21} \mu_{23} q_1^2 q_2^2 + \cos^2(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \mu_{21}^2 \mu_{23}^2 q_2^4 - \\ & - \mu_{11}^2 \mu_{13}^2 q_1^4 - \mu_{11}^2 \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^2] / [-\mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^{25} - \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^6 + \\ & + \cos^2(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^6 + \cos^2(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^6 - \\ & - \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 \mu_{21}^2 q_1^4 q_2^{21} - \mu_{12}^2 \mu_{21}^2 \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^{23} - \\ & - \mu_{13}^2 \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 q_1^2 q_2^{23} - \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{23}^2 q_1^4 q_2^2 - \mu_{11}^2 \mu_{13}^2 \mu_{22}^2 q_1^4 q_2^2 - \mu_{11}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^4 + \\ & + \cos^2(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^{25} + \cos^2(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^6 + \\ & + \cos^2(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^6 + \cos^2(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^6 - \\ & - 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \cos(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{11} \mu_{13} \mu_{21} \mu_{22}^2 \mu_{23} q_1^2 q_2^4 - \\ & - 2\cos(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \cos(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \cos(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \mu_{11} \mu_{12}^2 \mu_{13} \mu_{21} \mu_{23} q_1^4 q_2^2 - \\ & - 2\cos(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \cos(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \cos(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{11} \mu_{12} \mu_{21} \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^4 - \\ & - 2\cos(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \cos(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \mu_{12} \mu_{13} \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23} q_1^2 q_2^4 - \\ & - 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \cos(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{11}^2 \mu_{12} \mu_{13} \mu_{22}^2 \mu_{23} q_1^4 q_2^2 - \\ & - 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \cos(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \mu_{11} \mu_{12} \mu_{13}^2 \mu_{21} \mu_{22} q_1^4 q_2^2 + \\ & + \cos^2(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{23}^2 q_1^4 q_2^2 + \cos^2(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \mu_{13}^2 \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 q_1^2 q_2^4 + \\ & + \cos^2(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 \mu_{21}^2 q_1^4 q_2^{21} + \cos^2(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{11}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^4 + \\ & + \cos^2(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \mu_{11}^2 \mu_{13}^2 \mu_{22}^2 q_1^4 q_2^2 + \cos^2(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \mu_{12}^2 \mu_{21}^2 \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^4 - \\ & - 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \cos(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^6 - \\ & - 2\cos(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \cos(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^6 + \\ & + 2\cos(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{12} \mu_{13} \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23} q_1^2 q_2^{23} + \\ & + 2\cos(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{11}^2 \mu_{12} \mu_{13} \mu_{22}^2 \mu_{23} q_1^4 q_2^2 + \\ & + 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \mu_{11} \mu_{12}^2 \mu_{13} \mu_{21} \mu_{23} q_1^4 q_2^2 + \\ & + 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \mu_{11} \mu_{13} \mu_{21} \mu_{22}^2 \mu_{23} q_1^2 q_2^4 + \\ & + 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \mu_{11} \mu_{12} \mu_{13}^2 \mu_{21} \mu_{22} q_1^4 q_2^2 + \\ & + 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \mu_{11} \mu_{12} \mu_{21} \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^4], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_3^2 = & -\mu_{12}^2 \mu_{21}^2 q_1^2 q_2^{21} - \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 q_2^{23} + \cos^2(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{22}^2 q_1^4 + \\
& + 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \mu_{11} \mu_{12} \mu_{21} \mu_{22} q_1^2 q_2^2 + \cos^2(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 q_2^4 - \\
& - \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 q_1^4 - \mu_{11}^2 \mu_{22}^2 q_1^2 q_2^2] / [-\mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^{25} - \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^6 + \\
& + \cos^2(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^6 + \cos^2(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^6 - \\
& - \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 \mu_{21}^2 q_1^4 q_2^{21} - \mu_{12}^2 \mu_{21}^2 \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^{23} - \\
& - \mu_{13}^2 \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 q_1^2 q_2^{23} - \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{23}^2 q_1^4 q_2^2 - \mu_{11}^2 \mu_{13}^2 \mu_{22}^2 q_1^4 q_2^2 - \mu_{11}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^4 - \\
& + \cos^2(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^{25} + \cos^2(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^6 + \\
& + \cos^2(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^6 + \cos^2(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^6 - \\
& - 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \cos(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{11} \mu_{13} \mu_{21} \mu_{22} \mu_{23} q_1^2 q_2^4 - \\
& - 2\cos(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \cos(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \cos(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \mu_{11} \mu_{12}^2 \mu_{13} \mu_{21} \mu_{23} q_1^4 q_2^2 - \\
& - 2\cos(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \cos(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \cos(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{11} \mu_{12} \mu_{21} \mu_{22} \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^4 - \\
& - 2\cos(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \cos(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \mu_{12} \mu_{13} \mu_{21}^2 \mu_{22} \mu_{23} q_1^2 q_2^4 - \\
& - 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \cos(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{11}^2 \mu_{12} \mu_{13} \mu_{22} \mu_{23} q_1^4 q_2^2 - \\
& - 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \cos(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \mu_{11} \mu_{12} \mu_{13}^2 \mu_{21} \mu_{22} q_1^4 q_2^2 + \\
& + \cos^2(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{23}^2 q_1^4 q_2^2 + \cos^2(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \mu_{13}^2 \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 q_1^2 q_2^4 + \\
& + \cos^2(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 \mu_{21}^2 q_1^4 q_2^{21} + \\
& + \cos^2(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{11}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^4 + \\
& + \cos^2(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \mu_{11}^2 \mu_{13}^2 \mu_{22}^2 q_1^4 q_2^2 + \\
& + \cos^2(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \mu_{12}^2 \mu_{21}^2 \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^4 - \\
& - 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \cos(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \mu_{11}^2 \mu_{12}^2 \mu_{13}^2 q_1^6 - \\
& - 2\cos(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \cos(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{21}^2 \mu_{22}^2 \mu_{23}^2 q_2^6 + \\
& + 2\cos(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{12} \mu_{13} \mu_{21}^2 \mu_{22} \mu_{23} q_1^2 q_2^{23} + \\
& + 2\cos(\Phi_{12}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{22}-\Phi_{23}) \mu_{11}^2 \mu_{12} \mu_{13} \mu_{22} \mu_{23} q_1^4 q_2^2 + \\
& + 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \mu_{11} \mu_{12}^2 \mu_{13} \mu_{21} \mu_{23} q_1^4 q_2^2 + \\
& + 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{13}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{23}) \mu_{11} \mu_{13} \mu_{21} \mu_{22}^2 \mu_{23} q_1^2 q_2^4 + \\
& + 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \mu_{11} \mu_{12} \mu_{13}^2 \mu_{21} \mu_{22} q_1^4 q_2^2 + \\
& + 2\cos(\Phi_{11}-\Phi_{12}) \cos(\Phi_{21}-\Phi_{22}) \mu_{11} \mu_{12} \mu_{21} \mu_{22} \mu_{23}^2 q_1^2 q_2^4]. \tag{21}
\end{aligned}$$

Для дальнейшего анализа полагаем, что:

$$q_1^2 = q_2^2 = q; \Phi_{11} = \Phi_{12} = 0^0; \Phi_{12} = \Phi_{12} = 120^0; \Phi_{13} = \Phi_{13} = 240^0.$$

Получим зависимость значений дисперсий оценок сообщений от отношения мощностей сигнала и шума:

1. Следующие значения полных индексов модуляции взяты для определения зависимости:

$$\mu_{11} = 2 \cdot 10^{-3}; \mu_{21} = 4 \cdot 10^{-3}; \mu_{12} = 3 \cdot 10^{-2}; \mu_{22} = 10^{-2}; \mu_{13} = 10^{-2}; \mu_{23} = 2 \cdot 10^{-2}.$$

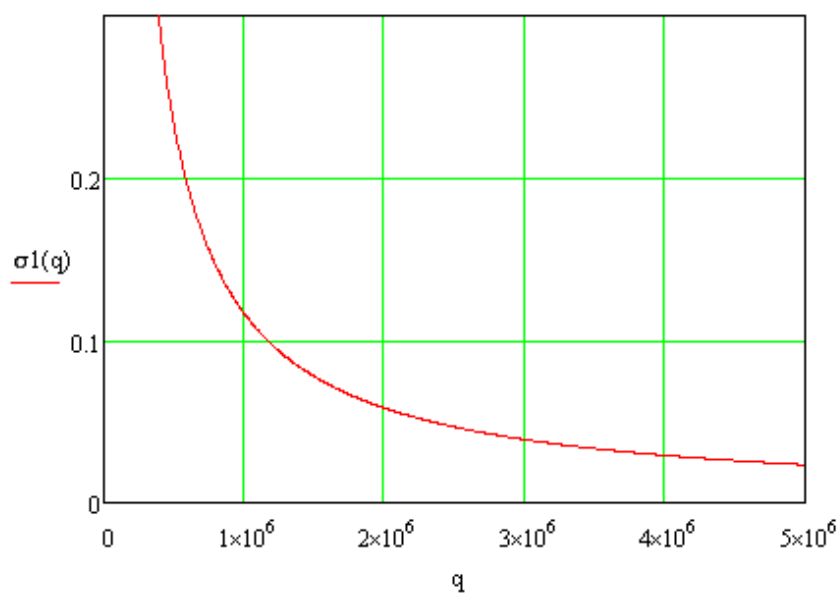


Рис.1. Дисперсия ошибки выделения первого сообщения

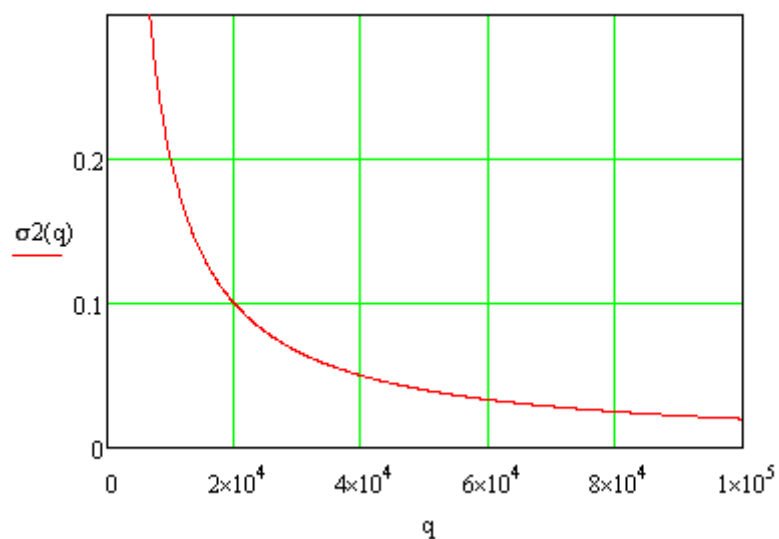


Рис.2. Дисперсия ошибки выделения второго сообщения

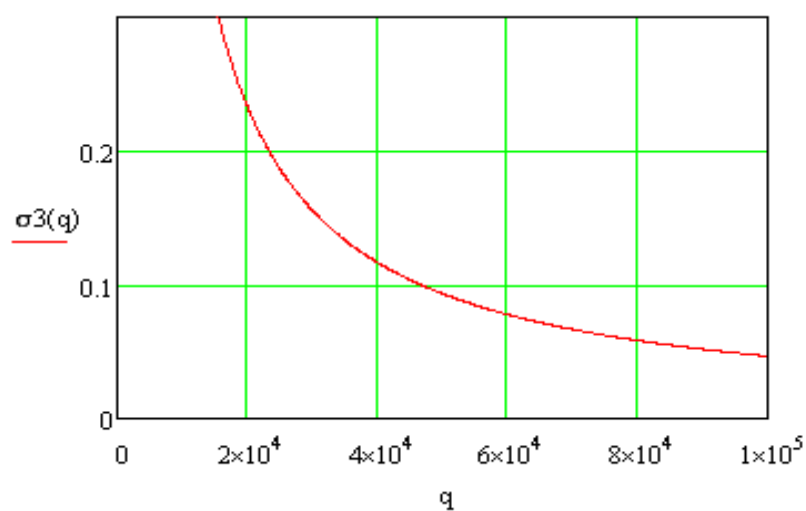


Рис.3. Дисперсия ошибки выделения третьего сообщения

2. Следующие значения полных индексов модуляции взяты для определения зависимости:

$$\mu_{11} = 5 \cdot 10^{-3}; \mu_{21} = 3 \cdot 10^{-3}; \mu_{12} = 4 \cdot 10^{-2}; \mu_{22} = 7 \cdot 10^{-2}; \mu_{13} = 2 \cdot 10^{-2}; \mu_{23} = 5 \cdot 10^{-2}.$$

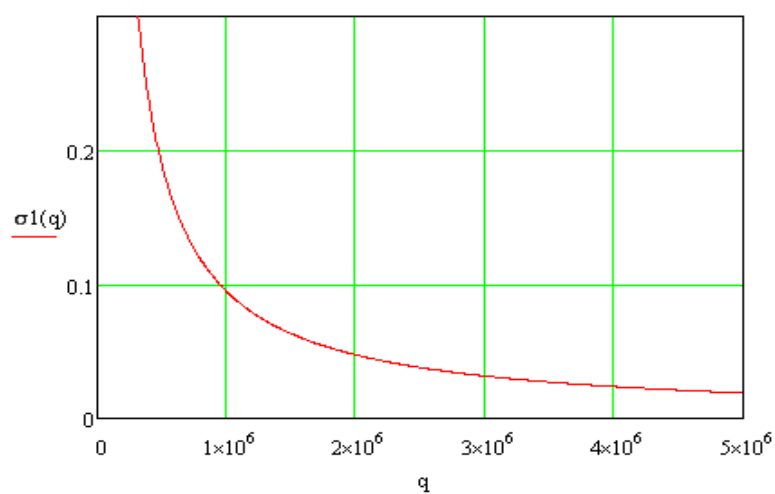


Рис.4. Дисперсия ошибки выделения первого сообщения

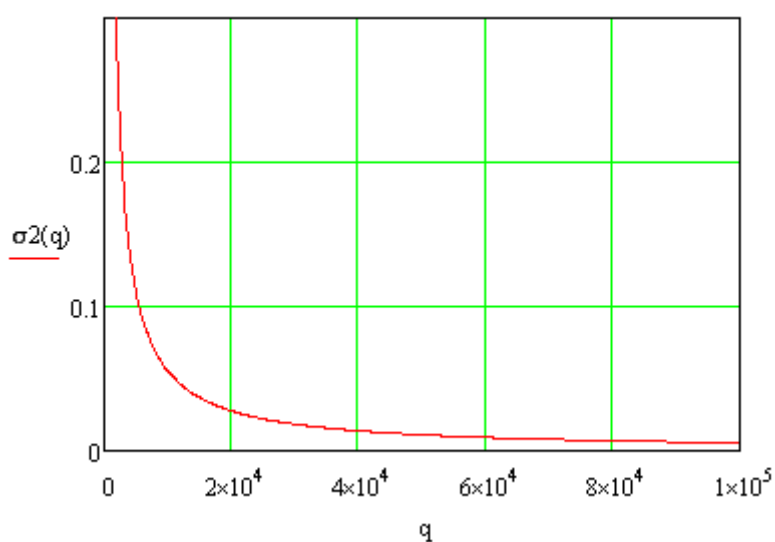


Рис.5. Дисперсия ошибки выделения второго сообщения

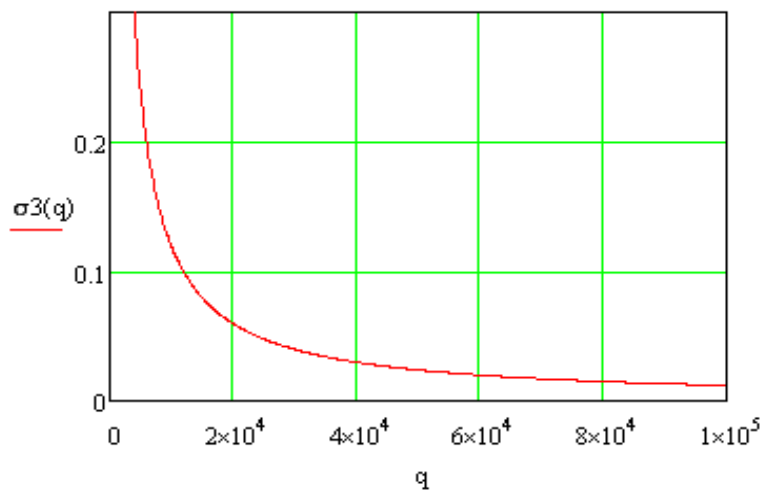


Рис.6. Дисперсия ошибки выделения третьего сообщения

Заключение

1. В результате исследований получены конкретные аналитические выражения для максимальных дисперсий ошибок выделения каждого из трёх независимых процессов, модулирующих совокупность двух сигналов по амплитуде и фазе. Матрица собственных и взаимных дисперсий выделения указанных процессов характеризует потенциальную помехоустойчивость приёма совокупности двух указанных сигналов в присутствии широкополосного шума.
2. В качестве графической иллюстрации полученных результатов на рис(1-6) приведены зависимости дисперсий ошибок выделения каждого из трёх сообщений от отношения мощностей канальных сигналов к мощностям помех в полосе сообщений. При анализе результатов необходимо учитывать, что сообщение может считаться выделенным, если дисперсия его ошибки не превышает значения $\sigma_{max}^2 = 0,11$, которое определено указанным в постановке задачи условием нормировки $|\lambda(t)| \leq 1$. Из приведённых на рис. 1-6 кривых следует, что для выделения каждого из трёх сообщений необходимо отношение мощностей сигналов к помехам не менее $1,2 \cdot 10^6$, а для более точного выделения первого из них - более $4 \cdot 10^6$. Данный вывод, естественно, справедлив при выполнении приведённых выше допущений о значениях полных индексов и углов модуляции, а также отношений мощностей сигналов и помех.
3. В соответствии с постановкой задачи приведённые результаты получены при условии, что все параметры сигнала и помех априорно известны.

Список литературы

1. Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. /В.А. Котельников.
2. -М.: Госэнергоиздат, -1956. 152 с.
3. Гуткин Л.С. Теория оптимальных методов приема при флуктуационных помехах.
4. 2-е изд./Л.С. Гуткин.- М.: Советское радио, -1972. 448 с.
5. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. Том 1, 2./Д. Миддлтон. - М.: Советское радио, 1961.
6. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. 4-е изд./Е.С. Вентцель. -М.: Наука, -1969. 576с.
7. Тихонов В.И. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов.
8. / В.И.Тихонов, Н.К. Кульман. -М.: Советское радио, -1975. 704 с.

References:

1. Kotelnikov V.A. The Theory of Optimum Noise Immunity ./V.A.Kotelnikov.-М.: Gosenergoizdat,-1956.152p.
2. Gutkin L.S. The Theory of optimum methods of reception at fluctuation noise.
3. 2 nd edition/L.S. Gutkin.- М.: Sovetskoe radio, -1972. 448 p.
4. Middleton D. An Introduction to Statistical Communication Theory. Tom 1, 2./D. Middleton. -М.: Sovetskoe radio, 1961.
5. Wentzel E. S. Probability Theory. 4th edition./E.S. Wentzel. -М.: Nauka, -1969. 576p.
6. Tihonov V.I. Nonlinear filtering and quasi-coherent reception of signals.
7. / V.I.Tihonov, N.K. Culman. -М.: Sovetskoe radio, -1975. 704 p.